

CC1 du 15 octobre 2014 - 1 heure

Les calculatrices ne sont pas permises. Les téléphones portables doivent être éteints. Aucun document n'est autorisé. Toute réponse doit être justifiée.

---

**Questions de cours.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $L$  un endomorphisme de  $E$ .

- a. Définir ce qu'est un vecteur propre de  $L$ . (1 pt)
- b. Définir ce qu'est une valeur propre de  $L$ . (1 pt)

**Exercice 1.** Soit  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorphisme défini par

$$L(x, y, z) = (y + z, 3x + 3z, -x + y)$$

- a. Écrire la matrice de  $L$  par rapport à la base canonique  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{R}^3$ . (2 pts)
- b. Déterminer une base du noyau de  $L$ . En déduire le rang de  $L$ . (3 pts)
- c. Donner la matrice de passage  $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$  de la base canonique à la base  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  où  $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 3, 1)$  et  $u_3 = (-1, 2, 1)$ . (2 pts)
- d. Calculer  $P^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ . (3 pts)
- e. Déterminer la matrice de  $L$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ . (3 pts)

**Exercice 2.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $(S)$  le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + 2y + az = 1, \\ ax + (a + 4)y + 3az = -2, \\ -ax - 2y + z = 1, \\ (a + 2)y + (3a + 1)z = b. \end{cases}$$

- a. Montrer que  $(S)$  est équivalent au système  $(S')$  suivant : (2,5 pts)

$$(S') \quad \begin{cases} ax + 2y + az = 1, \\ (a + 2)y + 2az = -3, \\ (1 + a)z = 2, \\ (1 + a)z = b + 3. \end{cases}$$

- b. Résoudre selon les valeurs des paramètres réels  $a, b$ , le système  $(S)$ . (2,5 pts)